Colección "Matemática Educativa y Tecnología"

APLICACIONES SOBRE LA MODELACIÓN, LA VISUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES EN LA ERA NUMÉRICA

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro "El Infinito en un Junco" inicia su obra diciendo:

"Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente"

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona "La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción".

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encentres en este libro beneficios.

El *libro "Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"* es la parte práctica del libro anterior llamado *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*. Pérez menciona lo siguiente:

"El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión "En la Era Numérica"), que se entrecruza con los tres primeros."

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA[1] y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Graficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t, manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

[1] ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que liguen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM[2] no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

[2] Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones

Secuencia didáctica

César Fabián Romero Félix[1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Entre los métodos dinámicos más accesibles para aproximación de raíces de funciones se destacan el método de *Newton-Raphson* y el método de *bisección* para encontrar raíces de funciones de una variable real. Se plantea favorecer el desarrollo de estructuras mentales de conceptos matemáticos como: a partir de la aproximación sistemática a la solución de problemas de modelación.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Variación, relaciones algebraicas, visualización matemática; representaciones gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: variable, relación funcional, polinomios de una variable, raíces, derivada y aproximación numérica.

Nivel de estudios

Las actividades son diseñadas para apoyar a estudiantes de cursos Cálculo Diferencial y Álgebra superior en el área de Ingeniería o de Ciencias de Computación.

Total de actividades y duración aproximada

La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios. La duración estimada de ambas actividades es de cuatro horas, sin incluir los ejercicios, que se consideran tareas *extra-clase.*

Materiales necesarios

- Computadoras o tablets con navegador de internet moderno (html5), uno por equipo.
- Hojas de trabajo con applets de GeoGebra disponibles en línea.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)
- Calculadora, lápiz y papel para desarrollo de algunos procedimientos numéricos.

Método o recomendaciones de enseñanza

La propuesta de enseñanza se estructura siguiendo el ciclo de enseñanza de APOE (Arnon et al., 2014, p. 58). Desde el marco APOE se plantea organizar la enseñanza en Actividades, discusión grupal en Clase y Ejercicios (ACE por sus siglas en inglés); de modo que el trabajo individual o en pequeños equipos pueda favorecer el inicio del desarrollo de concepciones mentales específicas,

[1] Universidad de Sonora, México.

mientras que en una discusión grupal se fomente la identificación de las propiedades generales obtenidas al resolver casos distintos, o la posibilidad de modificar los resultados obtenidos o los métodos mismos con los que se obtuvieron. Finalmente, la etapa de ejercicios permite al mismo tiempo reforzar las construcciones realizadas, aplicándolas a nuevos casos, y como un primer instrumento de evaluación, para observar si los estudiantes de manera individual pueden aplicar las concepciones pretendidas.

Se pueden considerar las actividades como dos ciclos ACE; cada uno iniciando con una sección de actividad, en la cual se promueven las estructuras a nivel Acción e inicio de proceso para cada método; después, en la etapa de discusión se abordan nuevos problemas y se promueve la interiorización para terminar de construir el Proceso y avanzar a la etapa de Objeto. Por último, en la sección de ejercicios se busca refinar la construcción de las concepciones, y la evaluación preliminar del desarrollo de las concepciones en términos del desempeño de los estudiantes al resolver problemas.

Para facilitar la implementación de las secuencias, y como elemento fundamental por sus características dinámicas y la inclusión de un lenguaje elemental de programación, las actividades se diseñan como hojas de trabajo dinámicas publicadas en la plataforma web de GeoGebra.

Se recomienda organizar equipos pequeños, 3 o 4 integrantes, para facilitar el trabajo con los materiales de GeoGebra, pero al final que se resuelvan los ejercicios de forma individual.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. doi:10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Actividad 1: Método de Bisección

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

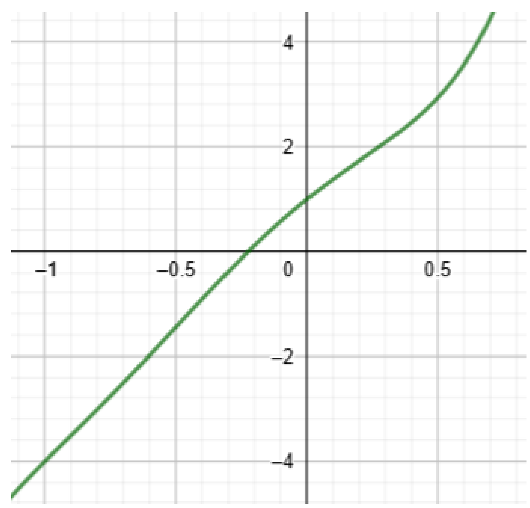
INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 Encontrar la raíz de un polinomio (Individual, 10 minutos)

1. Marca en la siguiente gráfica cuál sería la raíz del polinomio
2. Cuál es el valor de la raíz: ______________
3. ¿Podrías encontrar el valor exacto o al menos con 3 decimales? Explica cómo o por que no es posible:



4. En el applet 1 se tiene la gráfica del mismo polinomio, usa la herramienta *aproximar* para buscar el valor de la raíz con tres decimales de precisión. Escribe el valor encontrado:

r = ________

5. Escribe instrucciones paso por paso para que otro compañero pueda usarla herramienta aproximar y encontrar el valor de la raíz como tú lo hiciste.

Bloque 2 (Equipo, 10 minutos)

1. Del bloque anterior, seleccionen las instrucciones más precisas que haya escrito algún miembro del equipo.
   Cada equipo enviará el instructivo seleccionado a otro equipo y a su vez recibirá un instructivo de otro equipo para la misma tarea.
2. Con el instructivo recibido, usando el mismo applet 1, sigue las instrucciones al pie de la letra, *sin agregar, quitar, ni modificar los pasos,* y expliquen si funcionaron o no para llegar al valor de la raíz con 3 decimales.

3. ¿Le hizo falta considerar algo importante o sobraron pasos en el instructivo del otro equipo? Expliquen aquí:

4. ¿Corregirían algo de su propio instructivo? Expliquen aquí:

5. ¿Con cuál instructivo se llega más rápido a la raíz?

Actividad 2: Mejorar el método con GeoGebra

Nombre:____ Grupo:________ Fecha: _______

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Los métodos desarrollados en la actividad anterior deben compartir algunas características, conservaremos las siguientes y las convertiremos en procedimientos numéricos a realizar en GeoGebra:

1. Identificar un intervalo que contiene a la raíz
2. Acercarse en el punto medio del intervalo
3. Decidir si la raíz está en la mitad, a la izquierda o a la derecha
4. Definir un nuevo intervalo y repetir

En el applet 2-1, elige un polinomio de grado 5 que tenga una raíz real positiva, modificando la fórmula:

a_5 debe ser distinto de cero

Se aproximará el valor de esa raíz positiva r con 4 decimales.

Llena la tabla con los valores de a, b y r de cada iteración del método de bisección.

Itera el método hasta que se cumpla p(r)<.0001

Bloque 1: Aproximación manual (Equipo, 30 minutos)

1. Escribe el polinomio que elegiste y el valor de la raíz aproximada

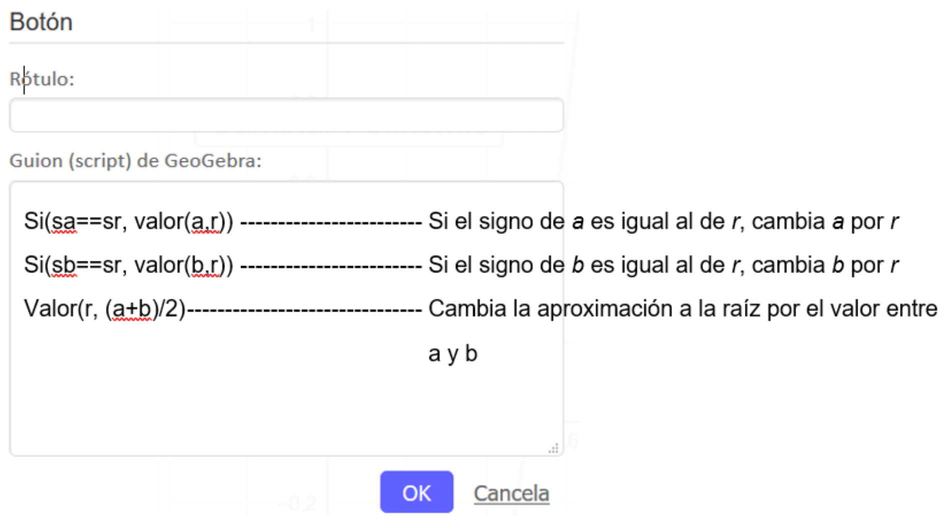
2. Describe paso a paso las instrucciones que le darías a GeoGebra para que realice las aproximaciones:

Bloque 2: Automático de uno en uno (Equipo, 30 minutos)

INSTRUCCIONES

En el applet 2-2 se creará un botón que realice los mismos pasos que realizamos en la actividad anterior, repitiendo un renglón a la vez.

1. Presiona el botón [Cambiar Polinomio] hasta obtener un polinomio con al menos dos raíces reales.
2. Ubica en la gráfica una posible raíz, r, anota el valor que parece tener en la barra de entrada, si parece estar en 0.5:
   $$\boxed{r = 0.5}$$
3. Comprueba si r es raíz, evaluando p en r:
   $$\boxed{pr=p(r)}$$
   si pr=0, encontraste la raíz exacta.
4. Crea un número a cercano y la izquierda de la posible raíz, si la posible raíz es 0.5:
   $$\boxed{a=0.4}$$
5. Para ver el número en la vista gráfica, crea el punto en el eje X:
   $$\boxed{A=(a,0)}$$
6. Crea un número b cercano y la derecha de la posible raíz, si la posible raíz es 0.5:
   $$\boxed{b=0.6}$$
7. Para ver el número en la vista gráfica, crea el punto en el eje X:
   $$\boxed{B=(b,0)}$$
8. Comprueba que hay una raíz entre esos dos números, comparando el signo del polinomio en ellos
   $$\boxed{\begin{array}{c} sa= sgn(p(a)) \\ sb= sgn(p(b)) \\ sr= sgn(p(r)) \end{array}}$$
9. Crea un botón para que GeoGebra calcule la bisección del intervalo (a, b) y decida en qué lado está la raíz Ingresa las siguientes líneas en el script del botón OK:



10. Escribe el polinomio que obtuviste

11. ¿Cuántos clicks se necesitan para que el valor de pr<0?0001 (sin contar el signo)?

12. ¿Cuál es el valor final de r?

13. Prueba que el botón funcione para aproximar otra raíz del mismo polinomio, escribe aquí:
    a. primera aproximación de la nueva raíz
    b. cantidad de clicks para llegar a la raíz con p(r)<.0001

Actividad 3: Automatizar el método

Nombre:____ Grupo:___________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Ahora que logramos que GeoGebra realice la aproximación un paso a la vez, agregaremos a la construcción un nuevo botón que repita la aproximación varias veces, para acercarse más rápido a la raíz de los polinomios.

Sobre la construcción anterior, se añadirán nuevos elementos. Antes de iniciar esta sección, debes tener:

polinomio *p(x)*

números *a, b, n, r, sa, sb, sr*

Puntos *A, B, R*

Botón para *bisección manual*, un paso a la vez

Bloque 1: Bisección repetida k veces (Equipo, 10 minutos)

En el applet 3-1 crearemos un botón que aplique la misma acción, pero ahora K veces.

1. Crea un número entero, k, con un valor entero relativamente alto

k=50

2. Crea un segundo botón para que GeoGebra aplique las instrucciones del primer botón k veces, con el guion:

Repite(k, EjecutaAlClic(botón1))

El primer botón debe llevar de nombre "botón1"

3. Según la fórmula ¿Cuál debería ser la raíz diferente de cero?
4. ¿A las cuántas repeticiones se obtendría el valor exacto de pi?

Bloque 2: comprobar el funcionamiento de la construcción

1. Redefine el polinomio p con la siguiente entrada:

$$p(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$$

2. ¿Cuál es el valor de la raíz negativa?

3. ¿Cuántos clicks se necesitaron para aproximar la raíz?

4. Vuelve a aproximar la raíz negativa con valores iniciales de a=-3, b=0

¿Por qué crees que GeoGebra deja de aproximar el valor de la raíz antes de llegar a r=2?

5. Intenta aproximar la raíz positiva, describe qué pasa cuando usas el botón:

6. ¿Por qué crees que este método sólo encuentra raíces de multiplicidad impar?

Bloque 3: Cálculo de raíces pares

Para calcular las raíces de multiplicidad par, hay que complementar la construcción usando la relación entre un polinomio y su derivada.

Si r es una raíz de multiplicidad par de p(x), entonces también es raíz de la derivada p'(x).

1. ¿Las raíces pares de p(x), son pares o impares de p'(x)?

Usando la respuesta anterior, si encontramos las raíces impares de *p'(x)* estaríamos encontrando las raíces pares de *p(x)*. En el applet 3-2 Crearemos un segundo botón para aproximar estas otras raíces, pero primero:

2. Crea la derivada de p, escribiendo directamente en la barra de entrada: p'
3. Crea los números equivalentes a los signos de *a, b* y *r,* para *p'(x):*

   sa2= sgn(p'(a))

sb2= sgn(p'(b))

sr2= sgn(p'(r))

4. Crea el nuevo botón para aproximar raíces pares, con el guión:

   Valor[r,(a+b)/2]

   Si[sa2==sr2, Valor[a,r]]

   Si[sb2==sr2, Valor[b,r]]

Este tercer botón, por default se llamará *botón3* Ahora puedes crear un cuarto botón que aplique K repeticiones del *botón3*

5. Crea el botón k bisecciones pares con el siguiente guión:

   Repite(k, EjecutaAlClic(botón3))

Bloque 4: Ejercicios

El archivo construido hasta este paso te debe permitir aproximar todas las raíces reales positivas y negativas. Para comprobarlo, factoriza (lo más posible) los siguientes polinomios.

1) $p(x) = x^6 - 0.091x^5 + 2.693x^4 + 3.006x^3 - 3.213x^2 - 2.761x$

2) $p(x) = x^6 - 3.821x^5 + 9.342x^4 - 15.218x^3 + 11.543x^2 - 1.573x - 1.276$

¿Qué limitaciones o debilidades consideras que tiene este método de aproximación de raíces?

Actividad 4: Método de Newton-Raphson

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

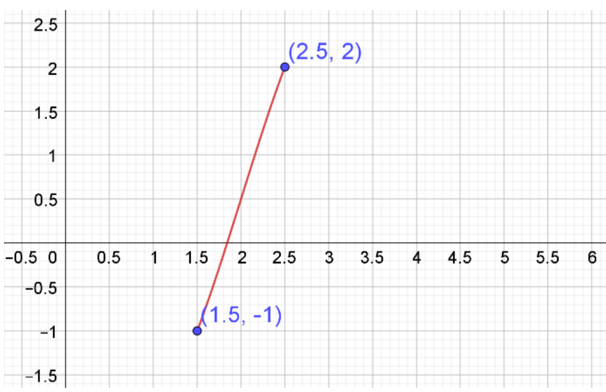
Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 Sería más fácil si el problema fuera lineal

En las actividades anteriores se completó un método para aproximar las raíces reales de un polinomio cualquiera, regresaremos un poco a comparar el problema con un caso más simple: una función lineal.

1. Para la siguiente función, suponiendo que es lineal, ¿cuál sería el valor de la raíz real?



Procedimiento:

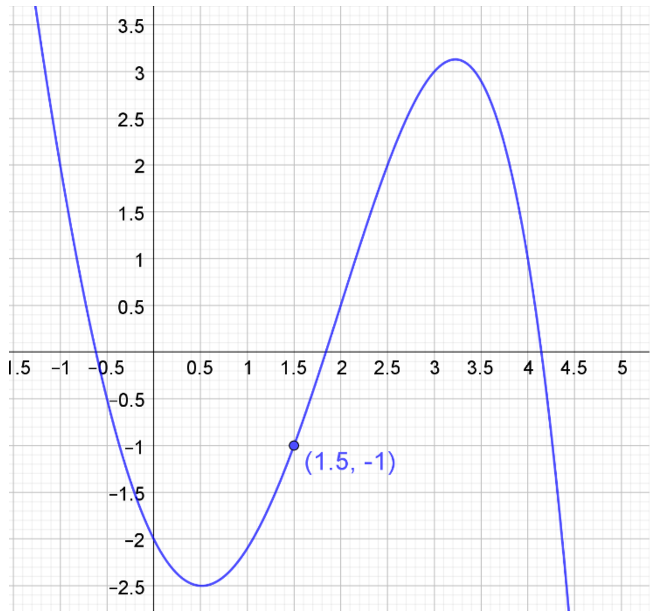
La gráfica anterior en realidad es parte de la gráfica de un polinomio de grado 4:

$$p(x) = -\frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{121}{60}x^2 - \frac{119}{60}x - 2$$

2. Utiliza la fórmula de *p(x)* para confirmar qué tan cerca está el valor encontrado de ser la raíz del polinomio. Escribe tu procedimiento:

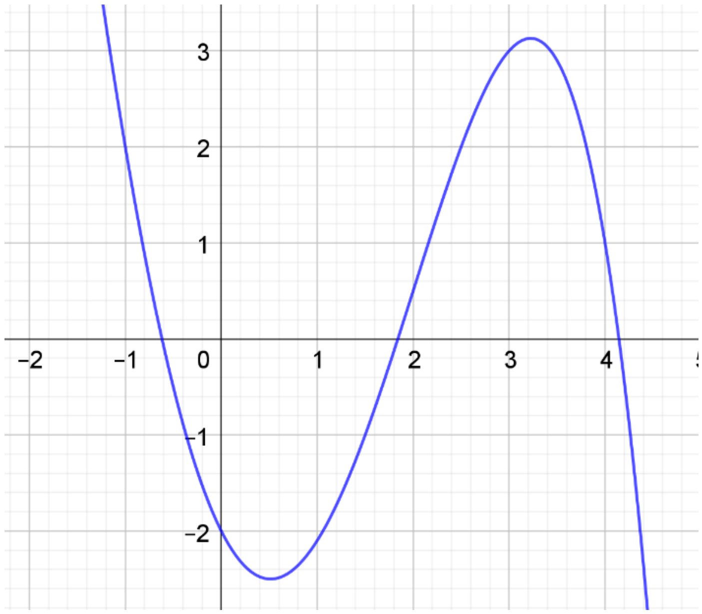
3. A continuación, se muestra una parte más representativa de la gráfica de *p(x)*, ¿Podríamos obtener una aproximación igual de cercana a la anterior si hubiéramos empezado con una recta que pasara por otros dos puntos del polinomio?

4. Escoge un segundo punto, con coordenada *x>3* y grafica la recta que pasa desde *(1.5,-1)* al punto que seleccionaste.



5. Para esta nueva recta, calcula la intersección con el eje X y utiliza la fórmula de *p(x)* para evaluar qué tan cerca está el valor encontrado de ser raíz de p.

6. Apóyate en los resultados anteriores para utilizar una recta que te aproxime al valor de la raíz negativa del polinomio:



Actividad 5: Mejorar el método con GeoGebra

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

En la actividad anterior se pudo observar que, iniciando con una recta apropiada, podemos aproximar bastante el valor de una raíz real, esta es la idea fundamental del método de Newton-Raphson.

A continuación, utilizaremos el resultado del curso de cálculo, sobre la relación entre una función, su derivada y sus rectas tangentes.

Bloque 1: Aproximar con recta tangente

Utilizaremos el applet 5-1 para aproximar las raíces reales de polinomios, a partir de encontrar una recta tangente *apropiada*.

En el applet puedes arrastrar un valor en el eje X, r_0, y con ello se actualizarán las posiciones de:

- El punto en el polinomio con ese valor de *x*
- La recta tangente al polinomio que pasa por ese punto

1. Para el polinomio inicial mostrado en el applet, ¿cuál sería un valor apropiado de r_0 para aproximar la raíz positiva con un decimal de precisión?

Manipula r_0 en el applet y escribe aquí tu respuesta:

2. Utilizando la fórmula de *p(x)* y la relación con su derivada, obtén la fórmula de la recta tangente que seleccionaste, nota que tienes un punto de la recta y puedes obtener su pendiente:

3. Con el método de la actividad anterior, obtén el valor aproximado de la raíz real:

4. Utilizando la fórmula del polinomio, tomando r_1 como el valor aproximado a la raíz, ¿qué valor se obtiene de $p(r_1)$?

Tomaremos ese valor como el *error de la aproximación.*

5. Cambia el valor de r_0 al valor de r_1 y repite el procedimiento de 2, 3 y 4:

6. ¿Cómo cambió el error al repetir el procedimiento con el nuevo valor inicial?

7. Si continuáramos repitiendo el cambio de r_0 al valor de r_1, ¿cuántas repeticiones crees que necesitaríamos para llegar a un error <0.00001?

Bloque 2: Mejorar el método con GeoGebra

INSTRUCCIONES

A partir de la fórmula de la recta tangente en un punto del polinomio, se obtuvo una fórmula para aproximar las raíces de polinomios.

Utiliza la fórmula obtenida para aproximar las tres raíces del polinomio que se muestra en el applet 5-2.

Se puede observar en la gráfica que una raíz es doble, por lo que:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$$

Empezaremos aproximando la raíz negativa y en todos los casos, se considera un error aceptable cuando es menor que .0001

1. Registra en la tabla del applet 5-1 cada repetición del método, anotando los valores de r_0, r_1 y el *error* obtenido.
2. ¿En cuántas iteraciones, empezando en -4, se llega a la raíz x_1?
3. Cambia el valor de r0 a -1.2 ¿A cuál raíz se aproximan las iteraciones del método?
4. ¿Qué valor puede tomar r_0 para aproximar la segunda raíz x_2?
5. Explica qué pasa con el método de Newton al aplicarlo con el valor de r0=-1.0088

6. ¿Qué relación tiene la respuesta anterior con la derivada?
7. ¿En qué orden aparece la segunda raíz de $p(x)$ con respecto a las raíces de la derivada del polinomio?
8. ¿En qué posición necesita estar r_0 para que el método nos lleve a la tercera raíz?
9. ¿Qué relación tiene la respuesta anterior con la derivada?

10. ¿Se puede usar el método de Newton-Raphson para aproximar todas las raíces reales de un polinomio? Explica cómo o por qué no

Actividad 6: Automatizar el método con GeoGebra

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

En esta actividad se automatizará la ejecución del método de Newton-Raphson para aproximar las raíces de un polinomio.

Iniciaremos construyendo un botón que al presionarlo indique a GeoGebra que realice todos los pasos que hicimos en la actividad anterior para aproximarse a una raíz del polinomio.

De tal manera, necesitamos:

**Un valor inicial de la posible raíz: r0*

** La secuencia de operaciones algebraicas que se aplicarían a r0 para obtener una mejor aproximación a la raíz: r1*

Posteriormente, se podrá construir un botón que repita el método tantas veces sea necesario, por lo que necesitaremos:

**Una manera de decidir cuándo dejar de aplicar el método, ya que estamos suficientemente cerca de la raíz buscada.*

Bloque 1: Instrucciones para aplicar el método

Aprovecharemos que GeoGebra permite definir acciones dentro de botones usando una forma de escribir similar a la de la clase de matemáticas.

Para iniciar, necesitamos las operaciones que se aplican a r0 para llegar a r1 de forma algebraica.

En el siguiente applet, 6-1, se tiene la misma construcción de la actividad anterior, para que recuperes la fórmula que permite obtener r1 desde r0.

Recordando que la pendiente de la recta tangente se obtiene con la derivada del polinomio.

1. ¿Cómo se puede escribir el valor de r1 en términos del valor de r0?

2. Elige dos valores distintos de r0 y comprueba que la fórmula escrita arriba genera el mismo resultado que el método aplicado gráficamente.
   Escribe aquí los valores de r0 y r1:

Ahora utilizaremos la herramienta de botón (aparece como OK en la barra de herramientas) para que GeoGebra realice las operaciones.

Dentro de un botón hay que utilizar comandos para indicarle qué hacer a GeoGebra. Como lo que queremos hacer es cambiar el valor de r0 por un valor más cercano a la raíz, utilizaremos el comando:

valor(nombre de objeto, nuevo valor)

Por ejemplo, si quisiéramos que el nuevo valor de r0 sea el doble de lo que ahora vale, escribiríamos:

*valor(r0, 2*r0)*

3. ¿Cuál debería ser el nuevo valor de r0 para aproximarse a la raíz? Escribe tu respuesta como un comando valor(nombre, nuevo valor)

Ya que tengamos bien definido el comando que se quiere utilizar dentro del botón, se aplica la herramienta *[botón]* desde la barra de herramientas.

Hay que indicar en qué parte de la vista gráfica se quiere ubicar el botón, haciendo clic con el mouse, y luego aparece una ventana donde se introduce el texto que aparecerá como etiqueta del botón y los comandos que el botón ejecutará con cada clic.

Al presionar el botón GeoGebra debería cambiar la posición de r0 por la de r1.

Registra en la tabla los valores que r0 para aproximar la primera raíz del polinomio (x1) con 4 decimales de precisión (error < 0001).

4. ¿El botón lleva a la misma solución que el método gráfico manual?

Explica por qué

Utiliza el mismo botón para aproximar las otras dos raíces y registra cada paso en la tabla de la derecha.

5. Escribe aquí en qué valor empezaste la aproximación de cada raíz y cuántos clics fueron necesarios para llegar a la raíz aproximada.

Bloque 2: Automatizar k-repeticiones

INSTRUCCIONES

A partir de la construcción anterior, se obtendrá de manera más eficiente la aproximación de raíces y puntos críticos.

En esta construcción, se automatizará la repetición del método de dos formas

Repitiendo una cantidad fija de veces

Hasta tener el "error" deseado

El applet inicia con el botón construido previamente y tiene nombre "botón1" (el nombre del botón no necesita coincidir con el texto que se ve en el botón)

Para mayor rapidez en los cálculos, sólo se definió:

polinomio p

número r

El botón1 [Raíz - 1 repetición] ejecuta el siguiente comando:

Valor(r, r-p(r)/p'(r))

Bloque 1: Comprobar primer botón

Abre el applet 6-2 y comprueba el funcionamiento del botón1.

1. ¿El botón aproxima correctamente las raíces?
   Escribe aquí la aproximación de las raíces del polinomio y cuántos clics se necesitaron para llegar a ellas

Bloque 2: Repetir una cantidad fija de repeticiones

Para lograr esto usaremos el comando: *Repite(cantidad, comando)*.

El comando que queremos aplicar es el que lleva dentro con la etiqueta [Raíz - 1 repetición], es importante no confundir el nombre del botón con la etiqueta del botón. En este caso el botón que lleva la etiqueta *[Raíz - 1 repetición]* tiene por nombre "*botón1*".

Para no tener que volver a escribir el comando que usamos en el botón de una repetición, podemos pedirle a GeoGebra que lo ejecute usando el nombre del botón. Como este es el comando que se activa al hacer clic en el botón, GeoGebra lo reconoce como :

EjecutaAlClic(botón1)

Entonces, si queremos que GeoGebra repita 3 veces ese comando, escribiríamos:

Repite(3, EjecutaAlClic(botón1))

Según la cantidad de clics que usaste para encontrar las raíces arriba,

1. ¿Cuál sería una cantidad apropiada de clics para que funcione con cualquier raíz?

2. Crea un botón que repita el método la cantidad de veces que elegiste El comando debería ser del tipo:

Repite(#, EjecutaAlClic(botón1))

Reemplazando # por el número que elegiste La etiqueta de ese botón debe llevar el número de repeticiones, como [repetir # veces]

3. ¿La cantidad que elegiste funciona si el valor de x inicia en -1000? Compruébalo en el applet

Si la cantidad de clics depende de qué tan cerca o lejos empecemos de las raíces, podríamos hacer que con el mismo botón, se aplique una cantidad variable k veces la repetición.

4. ¿Cómo cambiaría el comando para que se repita k veces?

Bloque 3: Ejercicios

En el mismo applet 6-2, cambia el polinomio por uno de grado 6 que tenga al menos 3 raíces diferentes.

1. Escribe la fórmula del polinomio
2. Usa el botón con k repeticiones para buscar las raíces, iniciando para cada raíz en el número entero más cercano a la raíz.
3. Escribe aquí en qué valor iniciaste la aproximación para cada raíz y cuántas repeticiones se necesitaron

4. Escribe la fórmula factorizada aproximada del polinomio

5. Comprueba que la fórmula aproximada es correcta, comparando las gráficas